

GEODETICKÉ SÚRADNICOVÉ SYSTÉMY A ICH VÝZNAM V GEOGRAFICKÝCH INFORMAČNÝCH SYSTÉMOCH

Ing. Róbert TENZER

Topografický ústav Armády SR, Banská Bystrica

1. Úvod

V súčasnosti existujú na Slovensku dva geodetické polohové systémy, a to *Jednotná trigonometrická sieť katastrálna (JTSK)* a *systém 1942*, resp. *systém 1942/83*.

Široké uplatnenie moderných technológií v geodézii a príbuzných odboroch, zaoberajúcich sa štúdiom Zeme, vedú k úsiliu o vytvorenie jednotného celosvetového referenčného systému a jeho neustáleho spresňovania.

Týmto systémom je v súčasnosti súradnicový systém Medzinárodnej služby pre rotáciu Zeme IERS [1]. Počiatok ITRF je definovaný v ťažisku Zeme s neistotou okolo 10 cm. Referenčný pól, ktorý je identický s osou **Z** pravouhlej priestorovej súradnicovej sústavy, referenčný poludník, ktorý je identický s rovinou **XZ**, sú totožné so systémom BTS (BIH Terrestrial System, BIH-Bureau International de l'Heure, predchodca IERS) s presnosťou 0,003'', pričom BIH referenčný pól bol pripojený k pólu CIO (Conventional International Origin) s presnosťou okolo 0,03''. Časové zmeny súradníc spôsobené pohybmi tektonických dosiek sú určované kombináciou vlastného merania zmien a teoretických hodnôt z modelov (AMO 2 alebo NNR-NUVEL 1) za podmienky „nulovej rotácie celej siete“.

V roku 1987 vytvorila medzinárodná geodetická asociácia IAG subkomisiu pre definovanie Európskeho referenčného systému EUREF. Táto komisia navrhla a definovala nový jednotný geocentrický súradnicový systém pre územie Európy **ETRS**, s využitím výsledkov kampane EUREF-89. Koncepcia ETRS vychádza z požiadavky minimalizácie časových zmien súradníc zapríčinených pohybom euroázijskej tektonickej dosky. ETRS je fyzicky realizovaný odpovedajúcim Európskym terestrickým referenčným rámcom viazaným príslušnými konštantami a algoritmami [2], [4], [8].

V deväťdesiatych rokoch sa prijala koncepcia modernizácie Slovenských geodetických základov, ktorá predpokladá postupné vybudovanie a praktické využitie

geocentrického referenčného systému ETRS, ako aj modernizáciu a integráciu výškových a gravimetrických základov [9], [10], [13].

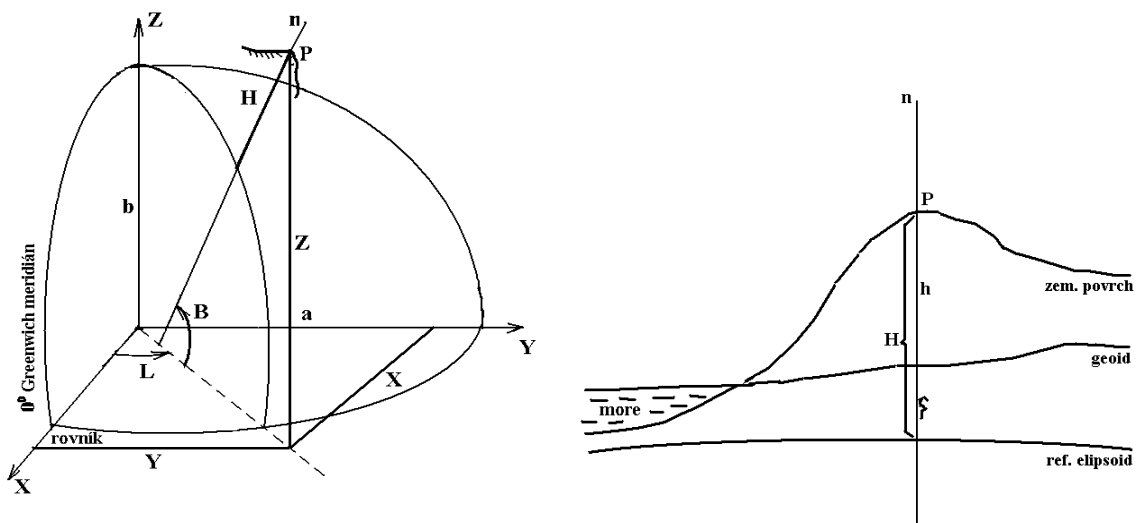
2. Teoretické základy

Polohu obecného bodu P v priestore jednoznačne určujú *pravouhlé priestorové súradnice* X, Y, Z , resp. *geodetické zemepisné súradnice* B, L, H , kde B je *zemepisná šírka*, L je *zemepisná dĺžka* a H je *elipsoidická výška* bodu P nad *referenčným elipsoidom* $E(a, e_1^2)$ po normále n , kolmej na povrch elipsoidu (obr.1). Vzhľadom k nepravidelnej štruktúre hustoty hmoty v zemskom telese je povrch *geoidu* (definovaného Listingom ako stredná hladina morí a oceánov) pomerne nepravidelný.

Elipsoidickú výšku H potom vyjadruje výraz

$$H = h + \zeta \quad (1)$$

kde h je *nadmorská výška* a ζ je *výška geoidu*, resp. *kvázigeoidu* (obr.1).



Obr.1) Súradnicové systémy na referenčnom elipsoide, geoid a nadmorská výška.

Vzájomný vzťah medzi X, Y, Z a B, L, H vyjadrujú priame a inverzné rovnice

$$X = (N + H) \cos B \cos L \quad Y = (N + H) \cos B \sin L \quad Z = (N(1 - e_1^2) + H) \sin B \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y}{X} \quad \operatorname{tg} B = \frac{Z + e_2^2 \cdot b \cdot \sin^3 \psi}{p - e_1^2 \cdot a \cdot \cos^3 \psi} \quad H = \frac{p}{\cos B} - N \quad (3)$$

kde a, b sú *veľkosti poloosí referenčného elipsoidu* a pre N, e_1^2, e_2^2, p, ψ platí

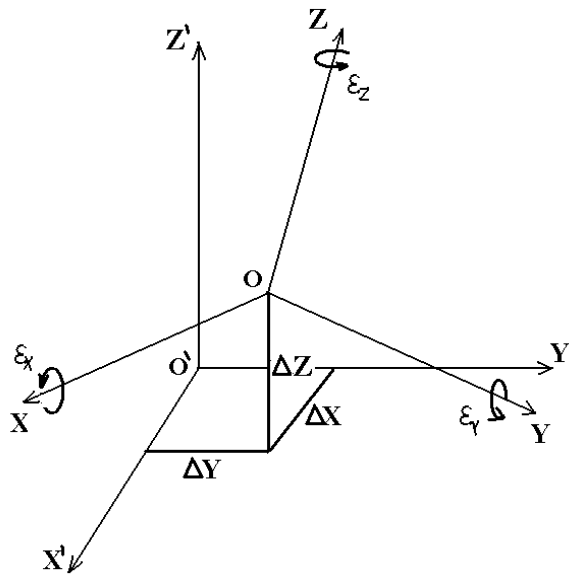
$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e_1^2 \sin^2 B}} \quad e_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad e_2^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{Z \cdot a}{b \cdot p} \quad (4)$$

V priestore ďalej uvažujeme dva referenčné geodetické súradnicové systémy $\mathbf{S}(\mathbf{O}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ a $\mathbf{S}'(\mathbf{O}', \mathbf{X}', \mathbf{Y}', \mathbf{Z}')$, ktorých počiatky \mathbf{O} a \mathbf{O}' nie sú obecné totožné $O \neq O'$, pričom $E(a, e_1^2)$ a $E'(a', e_1'^2)$ sú príslušné referenčné elipsoidy systémov \mathbf{S} a \mathbf{S}' (obr.2).

Vzájomnú polohu súradnicových systémov \mathbf{S} a \mathbf{S}' vyjadrujú parametre **translácie** ΔX , ΔY , ΔZ , **rotácie** ε_X , ε_Y , ε_Z a **rozmierovej deformácie** μ **podobnostnej transformácie** [3]

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_Z & \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z & 0 & -\varepsilon_X \\ -\varepsilon_Y & \varepsilon_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (5)$$

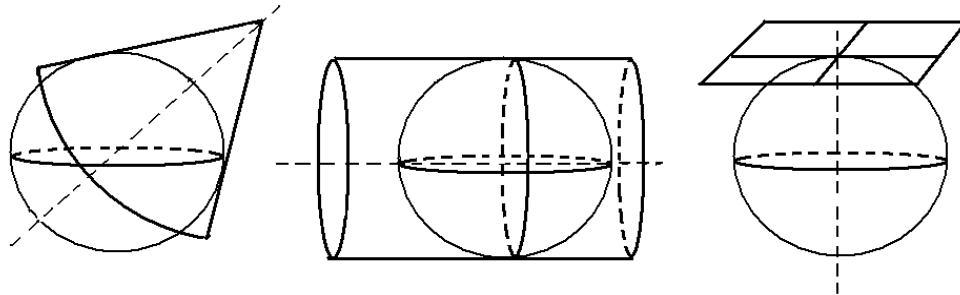


Obr.2) Vzájomná poloha dvoch súradnicových systémov \mathbf{S} a \mathbf{S}' v priestore.

Analytické funkcie obecných zobrazovacích rovníc matematickej kartografie

$$x, y = f(B, L) \quad B, L = f^{-1}(x, y) \quad (6)$$

vyjadrujú zobrazenie referenčného telesa (elipsoidu, gule) do roviny zobrazenia definovanom pravouhlými rovinnými súradnicami x, y (obr.3).



Obr.3) Princíp kartografického zobrazenia (kužeľového, valcového a azimutálneho).

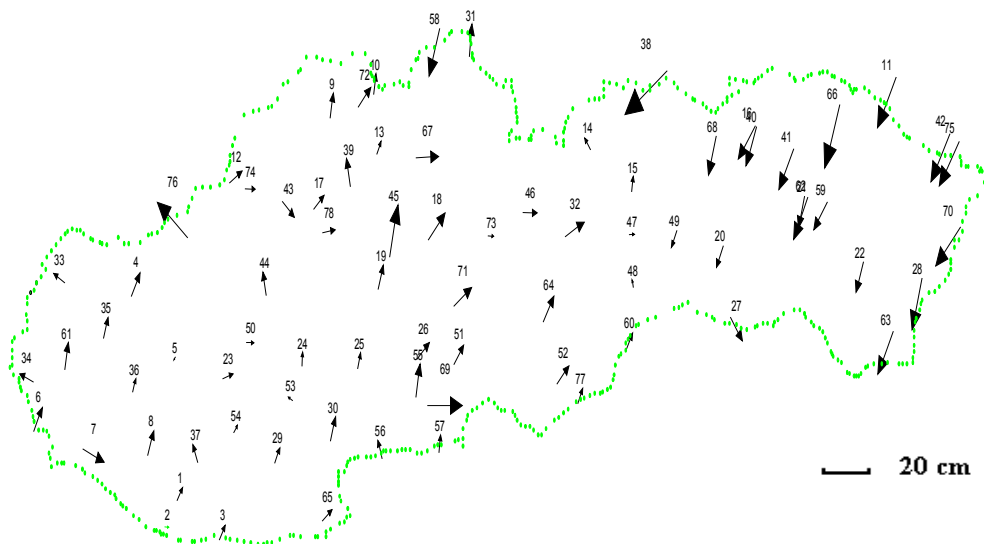
3. Prevod systému 1942/83 do ETRS

ETRS na území Slovenska realizujú súradnice 79 identických bodov určených v kampani AGS-96, S-JTSK-97 a SLOVAKIA-96 [5], [6], [11], [15].

Vzájomný vzťah medzi systémom 1942/83 a ETRS bol určený na základe odhadu parametrov translácie ΔX , ΔY , ΔZ pomocou **podobnostnej transformácie** v tvare **diferenciálnych zmien geodetických zemepisných súradníc** [7]

$$\begin{pmatrix} dB \\ dL \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{N}{a} e^2 \sin B \cos B & -\frac{M}{(1-f)} \sin B \cos B (2 - e_1^2 \sin^2 B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \\ -\sin L & \cos L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (7)$$

Pootočená a rozmerová deformácia v platnosti pre celý rozsah astronomicko-geodetickej siete nebola jednoznačne preukázaná. Zbytkové vektory opráv po eliminácii translácie poukazujú na existenciu lokálnych systematických tvarových a rozmerových deformácií s určitou tendenciou ohybu východnej časti siete (obr.4).

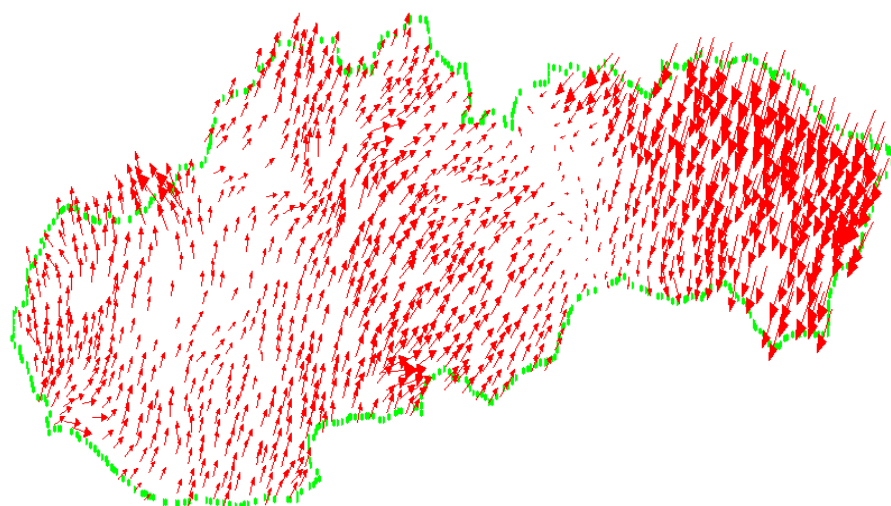


Obr.4) Zbytkové vektory opráv po transformácii S-1942/83 do ETRS-89, epocha 1989,0.

Lokálne tvarové a rozmerové deformácie boli matematicky vyjadrené a eliminované pomocou tzv. Jungovej transformácie v tvare

$$\delta x_j = \frac{\sum_i v_{x_i}^I \cdot s_{ij}^{-2}}{\sum_i s_{ij}^{-2}} \quad \delta y_j = \frac{\sum_i v_{y_i}^I \cdot s_{ij}^{-2}}{\sum_i s_{ij}^{-2}} \quad (8)$$

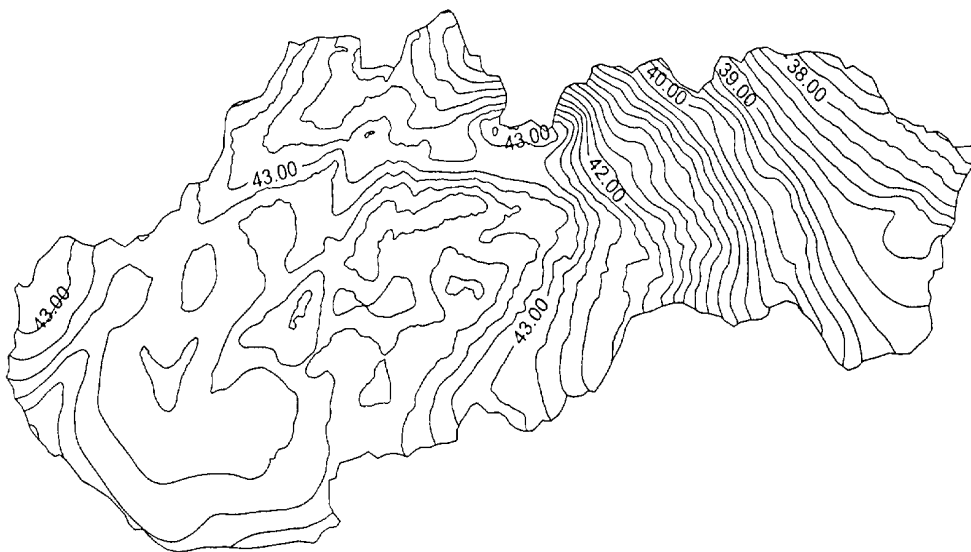
kde δx_j , δy_j sú súradnicové opravy na bodoch určovaných, $v_{x_i}^I$, $v_{y_i}^I$ sú súradnicové opravy na identických bodoch po eliminácii translácie a s_{ij} je vzájomná vzdialenosť medzi bodom daným a určovaným. Na obr.5 je graficky vyjadrený priebeh lokálnych deformácií na trigonometrických bodoch III. rádu.



Obr.5) Vektory opráv na trigonometrických bodoch III.rádu určených Jungovou transformáciou.

Dôvodom vyjadrenia vzájomného vzťahu medzi S-1942/83 a ETRS systémom rovníc (7) bez zavedenia elipsoidických výšok do výpočtu je skutočnosť, že nie je k dispozícii priebeh kvázigeoidu nad referenčným elipsoidom Krasovského (S-1942/83) a GRS-80 (ETRS). Vyjadriť vzájomnú polohu dvoch súradnicových systémov v priestore je možné systémom rovníc (5), v ktorých sú elipsoidické výšky vyjadrené implicitne, pričom tento tvar transformačných rovníc je spravidla súčasťou softwarového zabezpečenia informačných systémov o území. Vzhľadom k tomu je vhodné definovať transformačné parametre pre daný typ transformačných rovníc. Znalosť priebehu kvázigeoidu má samozrejme význam aj pri určovaní prvkov vonkajšej orientácie leteckých meračských snímok pri použití technológie GPS na určovanie stredu projekcie.

Nadmorské výšky sú vzhľadom k polohe referenčných systémov invariantné. Rozdiel v elipsoidických výškach je potom daný rozdielom vo výškach kvázigeoidu nad referenčnými elipsoidmi, pričom tento rozdiel na území Slovenska dosahuje niekoľko desiatok metrov.



Obr.6) Priebeh gravimetrického kvázigeoidu GMSQ98BF na území Slovenska.

Pre interpretáciu digitálnych informácií o území poskytuje informačný systém spravidla výber rôznych typov kartografických zobrazení. **Gauss-Krügerove konformné valcové** a **Mercatorovo univerzálne transverzálne kartografické zobrazenie** využíva väčšina štátov pre zobrazenie vojenských topografických máp.

V ďalšej kapitole sú vyjadrené základné rovnice kartografického zobrazenia v obecnej úprave umožňujúcej rôzne typy modifikácie (v závislosti od typu referenčného elipsoidu, polohy základného meridiánu a veľkosti zobrazovaného pásu).

4. Obecný tvar Gauss-Krügerovho a Mercatorovho kartografického zobrazenia

Gauss-Krügerove kartografické zobrazenie je definované vzťahmi [12]

$$x = s_o + N \cdot \sin L \cdot \cos B \frac{\Delta L^2}{2} + N \cdot \sin L \cdot \cos^3 B \cdot (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9 \cdot e_2^2 \cdot \cos^2 B + 4 \cdot e_2^4 \cdot \cos^4 B) \frac{\Delta L^4}{24}$$

$$\Delta y = N \cdot \cos B \cdot \Delta L + N \cdot \cos^3 B \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 B + e_2^2 \cdot \cos^2 B) \frac{\Delta L^3}{6} +$$

$$+ N \cdot \cos^5 B \cdot (5 - 18 \cdot \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14 \cdot e_2^2 \cdot \cos^2 B - 58 \cdot e_2^2 \cdot \cos^2 B \cdot \operatorname{tg}^2 B) \frac{\Delta L^5}{120} \quad (9)$$

pričom $\Delta L = L - L_o$, kde L_o je zemepisná dĺžka neskresleného (dotykového) meridiánu, s_o je dĺžka dotykového meridiánu od rovníka po zemepisnú šírku B ,

$$s_o = \int_0^B M \cdot dB = a \cdot (1 - e_1^2) \int_0^B \frac{1}{\sqrt{(1 - e_1^2 \cdot \sin^2 B)^3}} dB \quad (10)$$

Riešenie eliptického integrálu (10) je dané rozvojom funkcie $\sqrt{(1 - e_1^2 \cdot \sin^2 B)^3}$ do rádu podľa binomickej vety, ktorá po úprave nadobudne tvar [14]

$$s_o = B \cdot a \cdot (1 - e_1^2) \left(1 + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{45}{64} e_1^4 + \frac{175}{256} e_1^6 + \frac{11025}{16384} e_1^8 + \dots \right) -$$

$$- \sin(2B) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{2} \left(\frac{3}{4} e_1^2 + \frac{15}{16} e_1^4 + \frac{525}{512} e_1^6 + \frac{2205}{2048} e_1^8 + \dots \right) +$$

$$+ \sin(4B) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{4} \left(\frac{15}{64} e_1^4 + \frac{105}{256} e_1^6 + \frac{2205}{4096} e_1^8 + \dots \right) -$$

$$- \sin(6B) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{6} \left(\frac{35}{512} e_1^6 + \frac{315}{2048} e_1^8 + \dots \right) +$$

$$+ \sin(8B) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{8} \left(\frac{315}{16384} e_1^8 + \dots \right) - \dots \quad (11)$$

Inverzné funkcie k zobrazovacím rovnicam (9) vyjadrujú vzťahy

$$B = B_f - \frac{\Delta y^2}{2 \cdot M_f \cdot N_f} \operatorname{tg} B_f + \frac{\Delta y^4}{24 \cdot M_f \cdot N_f^3} \operatorname{tg} B_f (5 + 3 \cdot \operatorname{tg}^2 B_f + e_2^2 \cdot \cos^2 B_f - 9 \cdot \operatorname{tg}^2 B_f \cdot e_2^2 \cdot \cos^2 B_f)$$

$$\Delta L = \frac{\Delta y}{N_f \cdot \cos B_f} - \frac{\Delta y^3}{6 \cdot N_f^3 \cdot \cos B_f} (1 + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 B_f + e_2^2 \cdot \cos^2 B_f) +$$

$$+ \frac{\Delta y^5}{120 \cdot N_f^5 \cdot \cos B_f} (5 + 28 \cdot \operatorname{tg}^2 B_f + 24 \cdot \operatorname{tg}^4 B_f + 6 \cdot e_2^2 \cdot \cos^2 B_f + 8 \cdot \operatorname{tg}^2 B_f \cdot e_2^2 \cdot \cos^2 B_f)$$

kde polomery krivosti

$$N_f = \frac{a}{\sqrt{1 - e_1^2 \cdot \sin^2 B_f}} \quad M_f = \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{\sqrt{(1 - e_1^2 \cdot \sin^2 B_f)^3}} \quad (13)$$

sú počítané pre zemepisnú šírku B_f (odpovedajúcu dĺžke $s_o = x$ na základnom meridiáne L_T), ktorú vypočítame postupnou iteráciou vo vzťahu (11)

$$\begin{aligned}
B_{f(I)} &= s_o \cdot a^{-1} \cdot (1 - e_1^2)^{-1} \cdot \left(1 + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{45}{64} e_1^4 + \frac{175}{256} e_1^6 + \frac{11025}{16384} e_1^8 \right)^{-1} \\
B_{f(II)} &= \left(s_o + \sin(2B_{f(I)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{2} \left(\frac{3}{4} e_1^2 + \frac{15}{16} e_1^4 + \frac{525}{512} e_1^6 + \frac{2205}{2048} e_1^8 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sin(4B_{f(I)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{4} \left(\frac{15}{64} e_1^4 + \frac{105}{256} e_1^6 + \frac{2205}{4096} e_1^8 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(6B_{f(I)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{6} \left(\frac{35}{512} e_1^6 + \frac{315}{2048} e_1^8 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sin(8B_{f(I)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{8} \left(\frac{315}{16384} e_1^8 \right) \right) \cdot \\
&\quad \left(a \cdot (1 - e_1^2) \left(1 + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{45}{64} e_1^4 + \frac{175}{256} e_1^6 + \frac{11025}{16384} e_1^8 \right) \right)^{-1} \\
&: \\
&: \\
B_{f(k)} &= \left(s_o + \sin(2B_{f(k-1)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{2} \left(\frac{3}{4} e_1^2 + \frac{15}{16} e_1^4 + \frac{525}{512} e_1^6 + \frac{2205}{2048} e_1^8 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sin(4B_{f(k-1)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{4} \left(\frac{15}{64} e_1^4 + \frac{105}{256} e_1^6 + \frac{2205}{4096} e_1^8 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sin(6B_{f(k-1)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{6} \left(\frac{35}{512} e_1^6 + \frac{315}{2048} e_1^8 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \sin(8B_{f(k-1)}) \frac{a \cdot (1 - e_1^2)}{8} \left(\frac{315}{16384} e_1^8 \right) \right) \cdot \\
&\quad \left(a \cdot (1 - e_1^2) \left(1 + \frac{3}{4} e_1^2 + \frac{45}{64} e_1^4 + \frac{175}{256} e_1^6 + \frac{11025}{16384} e_1^8 \right) \right)^{-1} \tag{14}
\end{aligned}$$

Tvar uvedeného stupňa rozvoja priamych a inverzných rovníc (9) a (12) odpovedá zobrazovacím rovniciam Mercatorovho kartografického zobrazenia, pričom rovinné súradnice x , Δy sa vynásobia mierkovým koeficientom $m_o = 0,9996$,

$$x = x \cdot m_o = x \cdot 0,9996 \qquad \Delta y = \Delta y \cdot m_o = \Delta y \cdot 0,9996 \qquad (15)$$

K redukovanej súradnici Δy sa spravidla pripočíta 500 km , aby súradnice v celej oblasti pásu nadobúdali kladné hodnoty.

5. Záver

Moderné systémy navigácie využívajúce technológiu GPS ako aj geodetické zabezpečenie zberu a spracovania údajov o území či už samotným meraním v teréne alebo pomocou leteckej fotogrametrie, vedú k širokému zavádzaniu tejto technológie do Armády SR.

Na základe tejto skutočnosti je potrebné definovať vzájomný vzťah medzi súradnicovým systémom 1942/83, resp. S-1942 a ETRS z nasledovných dôvodov :

- systém NAVSTAR GPS pracuje a poskytuje údaje o polohe v súradnicovom systéme WGS-84,
- prevažná väčšina údajov o území (topografické a špeciálne mapy, databáza geodetických a geofyzikálnych údajov, digitálny model územia a reliéfu, atď.) je v systéme 1942, resp. S-1942/83.

Vzhľadom k tomu, že systém ETRS je prakticky totožný so systémom WGS-84, je vhodné použiť pre potreby armády práve tento systém.

Vzhľadom k potrebám armády môžeme definovať tri základné kategórie z hľadiska požadovanej polohovej presnosti :

Presnosť od 1 m pre potreby navigácie a spracovania údajov o území získaných z topografických máp.

Rádovo centimetrovú až decimetrovú presnosť pre potreby geodetického zabezpečenia, určenia prvkov vonkajšej orientácie snímok v leteckej fotogrametrii využívajúcej technológiu GPS pre určovanie súradníc stredu projekcie a topografické vyhodnotenie zmien v teréne pri obnove topografických máp.

Vysokú presnosť do niekoľkých centimetrov pri zabezpečení špeciálnych geodetických meraní, napr. letísk, ako aj obnovu a tvorbu geodetických polohových základov.

Definovaním približného transformačného vzťahu medzi S-1942/83 a WGS-84 ako aj dotlač zemepisnej siete WGS-84 a kilometrovej siete UTM (Universal Transverse Mercator Projection) do topografických máp, bola zabezpečená presnosť od 1 m.

Druhú kategóriu presnosti môže zabezpečiť práve prevod súradníc trigonometrických bodov do systému ETRS-89, epocha 1989,0.

Vysoké požiadavky na presnosť je možné zabezpečiť vybudovaním siete permanentných staníc prijímačov GPS na území Slovenska.

Použitá literatúra:

- [1] BOUCHER G., ALTAMINI Z.: International Terrestrial Reference Frame – GPS World, september 1996.
- [2] BRUYNINX C. : The EUREF permanent network, Status report, 1999.
- [3] BURŠA M.: Základy kosmické geodezie 1.díl, Praha 1967.
- [4] DOUŠA J.: Permanentní síť stanic GPS EUREF, GaKO č. 3/1998.
- [5] HEFTY J.: Odhad parametrov trojrozmernej nelineárnej transformácie medzi S-JTSK a ETRS-89 s využitím identických bodov ŠAGS a ŠTS I. rádu a ich analýza, Výskumná správa, Bratislava 1998.
- [6] HEFTY J., FROHMANN E.: Definícia a realizácia referenčného rámca ETRS-89 na Slovensku – problémy a východiská, Zborník vedeckých prác k 60.výročiu SF STU, Bratislava 1998.
- [7] CHEN J.Y.: Geodetic datum and doppler positioning, Graz 1982.
- [8] KOSTELECKÝ J. : Referenční souřadnicové systémy ICRS, ITRS a ETRS-89, jejich definice a realizace, GaKO č. 10/1998.
- [9] MOJZEŠ M.: Nové geodetické základy Slovenska, Zborník vedeckých prác k 60.výročiu SF STU, Bratislava 1998.
- [10] PRIAM Š.: Budovanie nových integrovaných geodetických základov Slovenska, GaKO č. 2/1997.
- [11] PRIAM Š. Stav budovania štátnej geodetickej integrovanej siete Slovenska, Zborník vedeckých prác k 60.výročiu SF STU, Bratislava 1998.
- [12] SRNKA E.: Matematická kartografie VAAZ, Brno 1986.
- [13] VANKO J.: Výškový systém po roku 2000 na území Slovenskej republiky, Zborník vedeckých prác k 60.výročiu SF STU, Bratislava 1998.
- [14] VYKUTIL J.: Vyšší geodezie, Brno 1982.
- [15] GPS Network Survey, Slovakia, Publication GIM GD-96-077.

Adresa autora:

Ing. Róbert Tenzer, Topografický ústav, Ružová 113, B. Bystrica,